INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

ÉTABLISSEMENT LIBRE D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR RECONNU PAR L'ÉTAT
(Décret du 1-9-1971, *J.O.* du 10-9-1971)

DIPLÔME VISÉ PAR LE MINISTÈRE DES UNIVERSITÉS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1979

MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 5

Toutes les questions traitées doivent être référencées avec *précision.*
La présentation ainsi que la rigueur des raisonnements ont une importance fondamentale.

I

On désigne par Ω l'ensemble des nombres complexes de module 1 et par θ le réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ défini par :

$$\begin{cases} \sin \theta = 0{,}96 \\ \cos \theta = 0{,}28 \end{cases}$$

On définit une suite de nombres complexes (z_p) où $p \in \mathbb{N}$ comme suit :

$$z_0 = 1 \; ; \qquad z_1 = \cos \theta + i \, . \sin \theta$$

$$z_p = z_1^p \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}$$

z_p et z_q étant deux éléments quelconques de cette suite, on notera simplement $d_{p,q}$ pour $d(z_p, z_q)$.

On rappelle que la distance de deux nombres complexes c_1, c_2 est donnée par :

$$d(c_1, c_2) = |c_1 - c_2| .$$

1° Montrer que $z_p \in \Omega$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2° Exprimer $d_{p,q}$ en fonction de θ puis, sans radicaux, en fonction de $\frac{\theta}{2}$.

3° Calculer $\cos \frac{\theta}{2}$ et $\sin \frac{\theta}{2}$ et en déduire que $d_{p,q}$ est un nombre rationnel quel que soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

4° On définit maintenant une sous-suite (Z_k) de (z_p) par la relation : $Z_k = z_{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la partie réelle de Z_k est un nombre de la forme :

$$a_k \, . \, 10^{-(2k+1)} \qquad \text{où} \qquad a_k \in \mathbb{Z} - 10\,\mathbb{Z}$$

et en déduire que les Z_k sont deux à deux distincts.

.../...

5° On pose $\theta = \alpha\,\pi$. Démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. α est irrationnel;

ii. Les z_p forment une famille infinie;

iii. Les z_p sont deux à deux distincts.

Déduire du 4° que α et les z_p vérifient ces trois propositions.

6° Pour tout $n \geqslant 2$, on définit le réel strictement positif $d_n = \inf_{\substack{0 \leqslant p \leqslant n-1 \\ 0 \leqslant q \leqslant n-1}} (d_{p,q})$

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $d_n \leqslant 2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ et en déduire que d_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

7° Montrer que $d_{p,q} = d_{p+m,\,q+m}$ quel que soit $(p, q, m) \in \mathbb{N}^3$.

8° Soit ε un réel strictement positif quelconque et soit c un point quelconque de Ω; montrer qu'il existe au moins un entier n tel que $d(c, z_n) \leqslant \varepsilon$.

II

On définit une suite de polynômes à une indéterminée et à coefficients réels de la façon suivante :

$$P_0 = 1 \; ; \qquad P_1 = x$$
$$P_n = x.P_{n-1} - P_{n-2} \qquad \text{pour } n \geqslant 2.$$

1° Expliciter P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , P_7 , P_8 .

On ordonnera ces polynômes suivant les puissances décroissantes de x.

2° Déterminer le degré et la parité de P_n .

3° Reproduire et remplir le tableau suivant :

(Sur la case située dans la rangée de P_t et dans la colonne de x, on écrit la valeur de $P_t(x)$. Les quatre valeurs indiquées ont pour but de vous aider à déceler une erreur éventuelle dans vos calculs des P_t .)

P_t	x				
	-2	-1	0	1	2
P_0.....					
P_1.....					
P_2.....					
P_3.....					
P_4.....					
P_5.....	-6				
P_6.....		1			
P_7.....				1	
P_8.....					9

.../...

4° Calculer $P_n(-2)$, $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(2)$.

5° Montrer que $P_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^i \, C_{n-i}^{i} \, x^{n-2i}$.

On traitera séparément les cas n pair et n impair.

6° Indiquer un procédé donnant instantanément le polynôme P_n à partir du triangle de Pascal.

7° Vérifier l'égalité :

$$C_{n-1}^{p} = \frac{n-p}{n+p} \left(C_n^p + C_{n-1}^{p-1} \right).$$

8° En déduire que pour $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{P'_{n+1} - P'_{n-1}}{n+1}$, P' désignant le polynôme dérivé de P.

III

1° Soit $S = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, un polynôme à coefficients entiers; montrer que si $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible, racine du polynôme S, alors, q divise a_n et p divise a_0.

2° En déduire que les racines rationnelles des P_n du II sont entières.

3° Soit $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation vectorielle Ψ_t d'angle t, dans $\mathbb{R}^2$ et posons $t = \lambda \pi$.

a. Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

i. Il existe un entier n tel que $\Psi_t^n = \mathrm{Id}$.

ii. $\lambda \in \mathbb{Q}$

b. Vérifier que $\Psi_t^2 - 2 \cdot \cos t \cdot \Psi_t + \mathrm{Id} = 0$

(Id est l'identité sur $\mathbb{R}^2$.)

4° Posant $x = 2 \cdot \cos t$, montrer que pour $n \geqslant 1$:

$$\Psi_t^{n+1} = P_n(x) \cdot \Psi_t - P_{n-1}(x) \cdot \mathrm{Id} ,$$

les P_n étant ceux du II.

5° Déterminer l'ensemble des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\Psi_t^2 = \mathrm{Id}$. (Il s'agit en fait de déterminer les matrices correspondantes.)

6° Supposant $\Psi_t^2 \neq \mathrm{Id}$, indiquer une condition nécessaire et suffisante sur $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ pour que l'on ait :

$$\Psi_t^{n+1} = \mathrm{Id}$$

(x représente toujours $2 \cdot \cos t$).

7° $\pi\,\mathbb{Q}$ désignant l'ensemble des réels de la forme $\alpha\,\pi$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$, déterminer l'ensemble des couples (t, n) de $([0, 2\pi[\cap \pi\,\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$ vérifiant l'équation :

$$\Psi_t^{n+1} = \mathrm{Id}, \quad \text{et respectant la condition } \cos t \in \mathbb{Q} .$$

8° Déterminer l'ensemble des éléments de $[0, 2\pi[\cap \pi\,\mathbb{Q}$ dont le sinus est rationnel.

9° En déduire l'ensemble des éléments de $[0, 2\pi[\cap \pi\,\mathbb{Q}$ dont le sinus et le cosinus sont rationnels.

-FIN-

NOTA. — *Pour résoudre* III, 7°, *utiliser* II, 3° *et* 4°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail